

TRML 團體賽-2004

1. 銳角三角形 ABC 中，若 H 為其垂心，且 $\overline{AH} = 2\overline{BC}$ ，則 $\cos A =$ _____。

2. 若 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，則 $\sum_{n=1}^{96} [\frac{53n}{97}] =$ _____。

3. 設實數 p 使得下列不等式

$$\begin{cases} 2x^2 + 25 \leq 13 + 10 + p \\ 3y^2 + 2 \leq 6 + 10 \\ 4z^2 + 2 \leq 6 + 5 - p \end{cases}$$

有實數解 x, y, z ，則 $p =$ _____。

4. 若橢圓 $x^2 + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ 與拋物線 $y = ax^2$ 不相交，則 a 的範圍為 _____。

5. 設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = \frac{3}{2}$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，考慮所有沿著垂直於 \overline{BC} 邊的直線將 $\triangle ABC$ 折疊，則重疊部分的面積最大值是 _____。

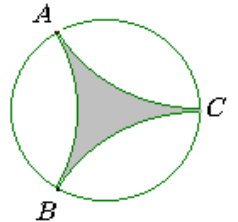
6. 若方程式 $x^3 + px^2 + 22x + 40 = 0$ 的三實根成等差數列，則 $p =$ _____。

7. 設 $x_1 = x_2 = 1$ ，且對所有的正整數 n ， $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ 。若 L 為最小的正整數使得 $x_{n+L} - x_n$ 恆為 17 的倍數，則 $L =$ _____。

8. 若函數 f 滿足 $f(93) = 93$ ，且對每一正整數 n ， $f(n) + f(n+3) = n^2$ 恆成立，則

$$f(30) = \text{_____}。$$

9. 如圖所示，設三等圓兩兩彼此外切於 A 、 B 、 C 三點，已知過 A 、 B 、 C 三點之圓的半徑為 1，則陰影區域面積為 _____。



10. 若 m 、 n 均為正整數，則 $\frac{1}{m+n+1} - \frac{1}{(m+1)(n+1)}$ 的最大值為 _____。

参考解答：

1. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

2. 2496

3. -2

4. $a < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $a \neq 0$

5. $\frac{9}{28}$

6. -12

7. 36

8. 4497

9. $3\sqrt{3} - \frac{3\pi}{2}$

10. $\frac{4}{45}$