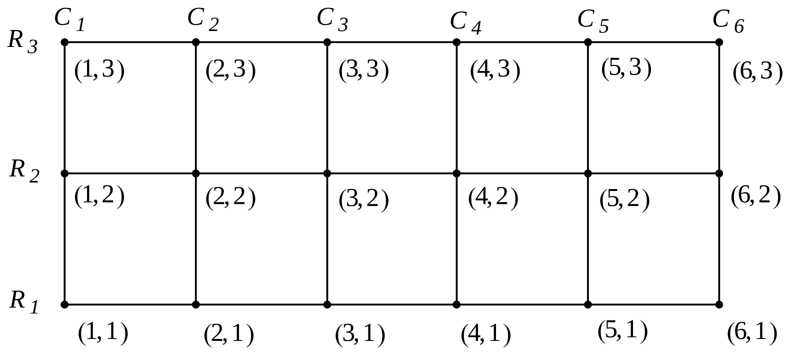
# TRML 思考賽-2005

思考賽共 10 題，每題 4 分. 答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明. 前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但反之後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題. 繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列. 每張紙上只寫一面，不要寫兩面.
准考編號大會已直接印於答案紙上，在繳交的答案時，不可有任何其他方式表明隊的身份.

---

設 $L(m,n)=\{(i,j):i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\}$ 是平面上 $m\times n$ 個整數格子點所成的集合，如下圖表示 $L(6,3)$。為了方便，我們稱 $R_j=\{(1,j),(2,j),\cdots,(m,j)\}$ 為 $L(m,n)$ 中第 $j$ 列，$C_i=\{(i,1),(i,2),\cdots,(i,n)\}$ 為第 $i$ 行。




設 $f(m,n)$ 為滿足下列條件$k$的最大值：在 $L(m,n)$ 中有$k$個點，使得從這$k$個點中找不出四個相異點，它們可以形成一個各邊平行於$x$軸及$y$軸的矩形（以下簡稱為<u>不構成矩形</u>；反之，若存在四點是邊與$x$軸及$y$軸平行的矩形的四個頂點，則簡稱<u>構成矩形</u>）。例如：$f(m,1)=m$，因為取了所有$m$點也構不成矩形；再如：$f(2,2)=3$，因為在 $L(2,2)$ 取 3 點不構成矩形，但取 4 點一定構成矩形；又如：$f(3,2)=4$，因為取 $(1,1)$，$(2,1)$，$(3,1)$，$(1,2)$ 等 4 點，則不構成矩形，然而取任意 5 點，都會有 4 點構成矩形。

1. 當 $m\geq 2$ 時，試求 $f(m,2)$，並證明你的答案。

2. 試求 $f(3,3)$，並證明你的答案。

3. 當$m\ge 4$時，試求$f\left(m,3\right)$，並證明你的答案。

4. 試求$f\left(5,4\right)$，並證明你的答案。

5. 試求$f\left(7,7\right)$，並證明你的答案。

6. 當$m\ge \dfrac{n\left(n-1\right)}{2}$時，試求$f\left(m,n\right)$，並證明你的答案。

對正整數$m$與$n$，設$A\left(m,n\right)$表示所有的整數數列$\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$所成的集合，其中$1\le a_1<a_2<a_3\cdots<a_m\le n$。

7. 在$A\left(3,10\right)$中有多少組數列$\left(a_1,a_2,a_3\right)$滿足：$a_2-a_1>1$且$a_3-a_2>1$。並證明你的答案。

8. 對$n>m\ge 3$，在$A\left(m,n\right)$中有多少組數列$\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$滿足：對所有的$i=2,3,\cdots,m$，$a_i-a_{i-1}>1$。並證明你的答案。

9. 在$A\left(3,10\right)$中有多少組數列$\left(a_1,a_{2,}a_3\right)$滿足：$a_2-a_1>1$, $a_3-a_2>1$，且$a_3<a_1+9$。並證明你的答案。

10. 對$n>m\ge 3$，在$A\left(m,n\right)$中有多少組數列$\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$滿足：對所有的$i=2,3,\cdots,m$，$a_i-a_{i-1}>1$且$a_m<a_1+n-1$。並證明你的答案。

参考解答：

1. $f\left(m,2\right)=m+1$

2. $f\left(3,3\right)=6$

3. $f\left(m,3\right)=m+3$

4. $f\left(5,4\right)=10$

5. $f\left(7,7\right)=21$

6. $f\left(m,n\right)=m+C_2^n$

7. 56

8. $f\left(m,n\right)=C_m^{n-m+1}$

9. 50

10. $\frac{n}{m}C_{m-1}^{n-m-1}$