2020 臺灣中小學數學能力檢定考試 TMT10

單選題

1. 設 $a=\sqrt{99}$ ，$b=\sqrt[3]{99^2}$ ，$c=\sqrt[4]{99^3}$ ，試選出正確的大小關係：

(A) $a>b>c$ (B) $b>a>c$ (C) $b>c>a$ (D) $c>a>b$ (E) $c>b>a$

2. 設 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 為一數列，令 $b_k=a_k+2k$ ，$k=1,2,\cdots,10$ ，若 $b_1+b_2+\cdots+b_{10}=240$，則 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ 之值為何？

(A) 120 (B) 130 (C) 160 (D) 185 (E) 218

3. 因為地球暖化因素，某地區的冬天氣溫創下有觀測記錄以來的高溫。下列統計表為某日 10 個觀測時間所測得的溫度。

時間(時)	01	03	05	07	09	11	13	15	17	19
溫度(°C)	34.5	34	34	35.6	36.4	36.6	37.5	38.5	37.9	35

試求這 10 個觀測時間的平均溫度為下列哪一個選項？

(A) 34°C (B) 35°C (C) 36°C (D) 37°C (E) 38°C

4. 設 $\frac{1}{a+b},\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a}$ 成等差數列，則下列何者也成等差數列？

(A) a^2,b^2,c^2 (B) c^2,a^2,b^2 (C) a,b,c (D) c,a,b (E) $\frac{1}{c},\frac{1}{a},\frac{1}{b}$

5. <u>九九</u>登山背包店進行周年慶活動，推出「任買兩件打 7 折」的活動。已知該店共有 8 款登山背包可供選擇，其價格如下：

款式	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
價格(元)	670	670	700	700	700	730	730	730

若某顧客依優惠方案購買兩個背包，則一共有多少種不同的付款金額？

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

6. 已知三次函數圖形的對稱中心為$(1,3)$，且局部看函數在$x=0$附近圖形的近似直線為

$y=5x+2$，則此三次函數為何？

(A) $f(x)=(x-1)^3+(x-1)+3$　(B) $f(x)=(x-1)^3-(x-1)+3$

(C) $f(x)=3(x-1)^3-(x-1)+4$　(D) $f(x)=2(x-1)^3-(x-1)+3$

(E) $f(x)=2(x-1)^3+(x-1)+5$

7. 已知ΔABC的頂點坐標$A(3,-3)$、$B(4,0)$、$C(-4,4)$，試求ΔABC之垂心(三高交點)？

(A) $(5,1)$　(B) $(5,2)$　(C) $(4,1)$　(D) $(4,2)$　(E) $(4,3)$

8. 以燈塔A為極點，正東方為極軸，建立極坐標航海地圖。已知燈塔A在下午 5:00 時偵測到有一船在$B[50,35^\circ]$的位置出現，當天晚上 8:00 在$C[30,155^\circ]$的位置出現(單位公里)。試求此船隻直線行駛在這三小時期間所航行的距離為下列哪一個選項？

(A) 30 公里　(B) 40 公里　(C) 50 公里　(D) 60 公里　(E) 70 公里

9. 袋中有 2 號球 2 個，3 號球 3 個，4 號球 4 個(共 9 個球)，現由袋中每次取一球，取後不放回，則取到的前 3 球號碼均不相同的機率為何？

(A) $\frac{2}{7}$　(B) $\frac{2}{9}$　(C) $\frac{4}{9}$　(D) $\frac{3}{14}$　(E) $\frac{1}{21}$

10. 設數列$\langle a_n\rangle$的前n項和為S_n，若對所有正整數n均滿足$a_n+2S_n=1$，試求此數列第四項a_4之值為何？

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{9}$　(C) $\frac{1}{27}$　(D) $\frac{1}{81}$　(E) $\frac{1}{243}$

11. 已知 $\sin\alpha = \cos^2\alpha$ ，則 $\cos^4\alpha + \dfrac{1}{\sin\alpha} =$ ？

(A) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ (C) 1 (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) 2

12. ΔABC 中，$\angle B = 30^\circ$，$\overline{AC} + \overline{BC} = 6$，求 $\overline{BC}$ 的最大值為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

13. 已知 5 根等長的木條可以圍成一個等腰三角形，如圖所示。那麼用 24 根等長的木條圍成一個三角形，則可以圍成多少種不全等的等腰三角形？

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

14. 坐標平面上有一個正方形，其中有一邊所在的直線斜率為 5，而此正方形兩對角線所在的直線斜率分別為 m_1 、 m_2 ，且 $m_1 < m_2$ ，則 $m_1 =$ ？

(A) $-\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $-\dfrac{1}{5}$ (D) 0 (E) $\dfrac{1}{5}$

15. 過點 $A(11,2)$ 作圓 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 164 = 0$ 的弦，其中弦長為整數的弦共有多少條？

(A) 26 (B) 28 (C) 30 (D) 32 (E) 34

選填題

1. 設多項式 $f(x)=ax^3+bx^2-2x+3$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為 2，且 $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 -4，則 $100a+b$ 之值為 ______ 。

2. 設有一組 8 筆的資料，所有的數值皆為整數，且當中最小的數值是 101，資料全距為 8。設此資料的標準差最小可能值為 s，則 $s^2=$ ______ 。

3. 設 k 為實數。直線 $3x+4y=5$ 與圓 $(x-3)^2+(y-4)^2=k$ 相切，則 $k=$ ______ 。

4. 若 20^{20} 是一個 n 位數(n 為正整數)，則 $n=$ ______ 。

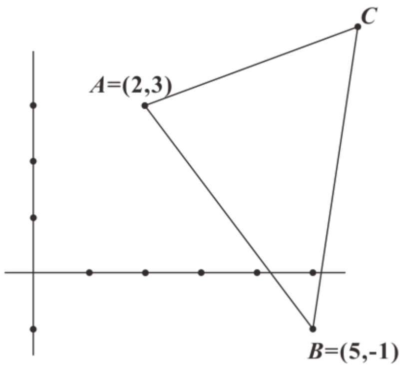
5. 若二次函數 $y=2x^2-x+4$，當 $-4\le x\le 1$ 時，y 之最大值為 M，最小值為 m，則 $M\times m$ 之值為 ______ 。

6. 設 $24x^3-2x^2+3x+a=b(2x-1)(3x-1)(4x-1)+c(2x-1)(3x-1)+d(2x-1)$，則 $100b+10c+d=$ ______ 。

7. 從 1000 到 2020 的正整數中，其中十位數小於個位數的正整數共有 ______ 個。

8. 設 n 為二位數的正整數。若有理數 $\frac{23}{n}$ 以十進位制小數表示時為有限小數。則可能之 n 值共有 ______ 個。

9. 如圖，已知三角形 ABC 的面積為 10，且點 C 一定在直線 $4x+ay=b$ 上。則 $a+b=$ ______ 。



10. 有一個 8×8(鉛直線 9 條，水平線 9 條)的方格表，從中任取二條鉛直線和二條水平線。若此四條線可圍成一個正方形之機率為 $\dfrac{b}{a}$(最簡分數)，則 $a+b=$ ______ 。

11. $(2x+1)^7$ 的展開式中，最大的係數之值為 ______ 。

12. 投擲一顆公正骰子兩次的遊戲。若前後兩次所投擲骰子的點數相同，則可得 300 元，若擲第二次骰子的點數大於第一次投擲的點數時，則可得 60 元；而其餘情形，則沒有獎金。已知<u>小清</u>參加此遊戲一次，則<u>小清</u>獲得獎金的期望值為 ______ 元。

13. 桌上有相同的紅筆 5 支、相同的藍筆 4 支、相同的鉛筆 3 支，若從其中任取至少 2 支筆，則有 ______ 種取法。

14. 若一數列$\{a_n\}$從第三項起，每一項都等於前兩項的和，例如$2,5,7,12,19,\cdots$則稱此數列為 F 型數列。下面的方格中，若每一行以及每一列的數都是 F 型數列，則$a=$ ______ 。

1			
	5		
			21
		22	a

15. 在某次桌球單打比賽中共有 13 名選手參賽，原計畫每兩名選手恰好比賽一場，但其中有 4 名選手因為身體不適，所以在各參加 2 場賽事之後就退出了比賽。這樣，全部比賽完成總共只進行了 43 場。則上述 4 名選手之間比賽的場數是 ______ 場。

參考公式：

(一) 首項為a，公差為d的等差數列前n項之和為$S=\dfrac{n\left(2a+(n-1)d\right)}{2}$

首項為a，公比為$r\,(r\neq 1)$的等比數列前n項之和為$S=\dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$

(二) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(三) 設$A(x_0,y_0)$為直線$L:ax+by+c=0$外一點，則點A到直線L距離為$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(四) ΔABC 的正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 表 ΔABC 的外接圓半徑)

ΔABC 的餘弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

(五) 一維數據$X:x_1,x_2,\cdots,x_n$

算術平均數$\mu_x=\dfrac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)$

標準差$\sigma_x=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[\left(x_1-\mu_x\right)^2+\left(x_2-\mu_x\right)^2+\cdots+\left(x_n-\mu_x\right)^2\right]}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots+x_n^{\,2}\right)-\mu_x^{\,2}}$