

2021 年第五屆臺灣中小學數學能力檢定考試

Taiwan Mathematics Test

TMT11A

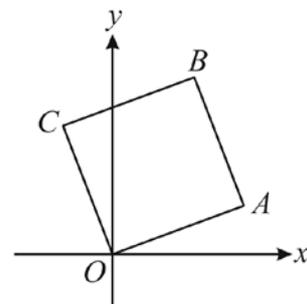
考試須知

- 未經監考人員宣佈打開測驗卷之前，不可先行打開試卷作答。
- 本次測驗時間共 80 分鐘，分別為單選題 15 題、選填題 15 題，共 30 題。
 - 單選題：
 - 每一題各有 A、B、C、D、E 五個選項，其中只有一個選項是正確的答案。
 - 請使用 2B 鉛筆在「答案欄」上適當的圓圈內塗黑，請檢查所圈選的答案是否正確，並將錯誤及模糊不清部分擦拭乾淨。請注意，只有將答案圈選清楚在答案卡上才得以計分。
 - 選填題：
 - 每一題答案是範圍在 000 至 999 之間的整數。如答案為 7，請塗黑 007；如答案為 43，請塗黑 043；如答案為 123，請塗黑 123。全對才給分，沒有倒扣或部份給分。
 - 請使用 2B 鉛筆在「答案欄」上適當的圓圈內塗黑，並請檢查所填寫的答案數字與塗黑的圓圈是否一致，任何的答案數字及塗黑的圓圈如果不一致，將不予計分；如欲修正，請將錯誤擦拭乾淨。
- 計分方式：(總分 150 分)
 - 單選題：每一題答對可得 5 分，未作答得 1 分，答錯得 0 分。
 - 選填題：每一題答對可得 5 分，未作答及答錯得 0 分。
- 除了考試所准許使用的尺、圓規、橡皮擦、空白計算紙及無記號之方格紙與身分證明文件外，請勿攜帶任何輔助工具(包含手機、計算器、量角器、智慧型手錶及具計算功能的裝置等)進入考場，考卷上所有的題目均不需使用計算器便可作答。
- 試卷內的圖形皆為示意圖，可能未依比例繪製。
- 交卷時請將答案卡交回，測驗開始 40 分鐘後，始准交卷離場。

2021 臺灣中小學數學能力檢定考試 TMT11A

單選題

1. 設多項式 $f(x) = x^4 + x + 1$ ，若 $f(x)$ 除以 $x^2 - 1$ 的餘式為 $ax + b$ ，則 $2a + b = ?$
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
2. 若 $|\vec{a}| = 3$ 、 $|\vec{b}| = 4$ ，且 \vec{a} 與 \vec{b} 的夾角為 120° ，則 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = ?$
 (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11
3. 設 a, b 為實數且 $10^a = 81$ ， $10^b = 30$ ，則 $\frac{a}{1-b} = ?$
 (A) -1 (B) -2 (C) -3 (D) -4 (E) -5
4. 有四個正數，前三個數成等比數列，其乘積為 216，後三個數成等差數列，其和為 36，若此四數依序為 a, b, c, d ，則 $d = ?$
 (A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18
5. 函數 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的圖形，可由函數 $y = 2 \sin x$ 的圖形依下列哪一種方式移動得到？
 (A) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ (B) 向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ (C) 向右平移 $\frac{\pi}{3}$
 (D) 向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ (E) 無論如何平移也不可能
6. 在坐標平面上， O 為原點，如右圖已知 $\square OABC$ 為正方形且直線 \overleftrightarrow{OA} 斜率為 $\frac{1}{2}$ ，則對角線 \overleftrightarrow{OB} 斜率為何？
 (A) $\frac{5}{2}$ (B) 3 (C) $\frac{7}{2}$ (D) $\frac{10}{3}$ (E) $\frac{13}{4}$

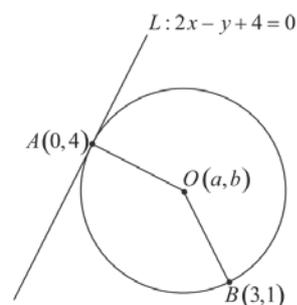


7. 已知 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，且 $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^7 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則下列何者正確？
- (A) $a = -251$ (B) $b = 254$ (C) $c = 384$
 (D) $d = -382$ (E) $a + b + c = 0$

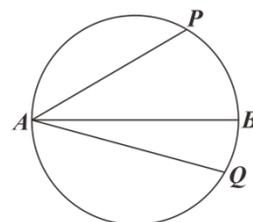
8. 空間中三點 $A(2, -1, 1)$ 、 $B(-1, 2, 0)$ 、 $C(1, 1, 2)$ ，則點 B 到直線 AC 的距離為下列哪一個選項？
- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (E) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

9. 某機器人需有 A 、 B 、 C 三種不同的晶片才能正常運轉，且只要其中一種晶片損壞，該機器人就無法正常運轉。已知 A 、 B 、 C 晶片使用一年後會損壞的機率分別為 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{10}$ 。若使用該機器人一年後且因晶片損壞而無法運轉的條件下，試問 A 晶片沒有損壞的機率為何？
- (A) $\frac{2}{11}$ (B) $\frac{7}{11}$ (C) $\frac{7}{22}$ (D) $\frac{13}{22}$ (E) $\frac{19}{44}$

10. 如圖，圓 C 與直線 $L: 2x - y + 4 = 0$ 切於點 $A(0, 4)$ ，且 $B(3, 1)$ 為圓 C 上一點。若圓 C 之圓心坐標為 $O(a, b)$ ，則 $a + b = ?$
- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9



11. 如圖所示，圓 C 的直徑 $\overline{AB} = 10$ ， P 、 Q 為圓上的兩點，若 $\overline{AP} = 8$ 且 $\angle QAB = \frac{1}{2} \angle PAB$ ，則 $\overline{AQ} = ?$
- (A) $2\sqrt{10}$ (B) $3\sqrt{5}$ (C) $4\sqrt{5}$ (D) 9 (E) $3\sqrt{10}$

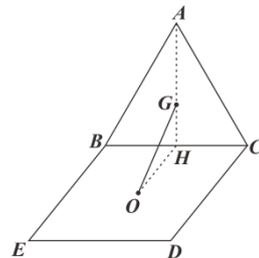


12. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{CA} = 6$ 且 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則 $\overline{AH} = ?$

- (A) $\frac{9}{\sqrt{7}}$ (B) $\frac{10}{\sqrt{7}}$ (C) $\frac{12}{\sqrt{7}}$ (D) $\frac{14}{\sqrt{7}}$ (E) $\frac{15}{\sqrt{7}}$

13. 若空間中一正三角形 ABC 所在平面與一正方形 $BCDE$ 所在平面垂直(如右圖)，正方形中心為 O ，正三角形重心為 G ，以 \overline{OG} 為一邊所成之正三角形為 $\triangle OGF$ ，則 $\triangle OGF$ 面積： $\triangle ABC$ 面積為下列何者？

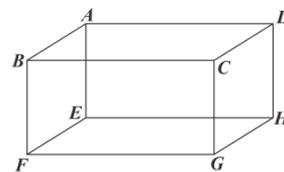
- (A) $1:\sqrt{2}$ (B) $1:\sqrt{3}$ (C) $1:2$ (D) $1:3$ (E) $2:3$



14. 某高射砲之砲口坐標為 $(0,0,20)$ ，今發射一枚砲彈，砲彈之行進軌跡為一拋物線，若砲彈之最高點在 $(30,0,40)$ 處，砲彈之落海點(海平面之 z 坐標為 0)為 $(a,0,0)$ ，則 $a = ?$

- (A) $30 - 5\sqrt{2}$ (B) $15 + 15\sqrt{2}$ (C) $15 + 30\sqrt{2}$
 (D) $30 + 15\sqrt{2}$ (E) $30 + 30\sqrt{2}$

15. 如圖所示， $ABCDEFGH$ 為一長方體，若 \overline{AB} 在直線 $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ 上， \overline{EH} 在直線 $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{5}$ 上， \overline{CG} 與 \overline{AB} 、 \overline{EH} 之距離分別為 $\frac{2}{\sqrt{42}}$ 、 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ，



求此長方體之對角線 \overline{DF} 長為何？

- (A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$ (E) $\sqrt{7}$

| |
|-----|
| 選填題 |
|-----|

- 已知 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$ ， $\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = -3$ ，則 $\begin{vmatrix} c+2e & d+2f \\ 3a & 3b \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 若實數 x 、 y 、 z 滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ，則 $2x + 3y + 6z$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 在 $\triangle ABC$ 中，若 $(x+1)\overrightarrow{AB} + (2x-y)\overrightarrow{BC} + (x+y-98)\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ ，則 $x+y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 空間中一點 $P(1,1,1)$ 及兩平面 $E_1: 2x+3y+6z=k$ 與 $E_2: 2x+2y+z=2$ ，若「點 P 到 E_1 的距離」是「點 P 到 E_2 的距離」的兩倍，則所有可能的實數 k 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 辦公室內有一排相鄰的 7 個座位，甲、乙、丙三人選擇入坐，則她們不可以完全相鄰的坐法有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種。
- 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式函數， $y=f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1,0)$ ，且通過三點 $A(2,-3)$ 、 $B(3,0)$ 、 $C(4,k)$ ，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 在 $\triangle ABC$ 中，若 $2\sin A + \cos B = \sqrt{3}$ ， $\sin B + 2\cos A = \sqrt{5}$ ，則 $1000\sin C = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

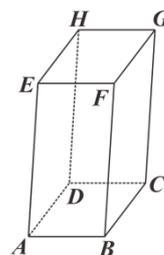
8. 設 $y=k$ (其中 k 為定值) 與兩函數 $y=10^x+3$ 、 $y=10^x$ 的圖形分別交於 A, B 兩點, 已知 \overline{AB} 長為 2, 若 $k = \frac{n}{m}$, 其中 m, n 為互質的正整數, 則 $m+n$ 之值為 _____。

9. 在 $\triangle ABC$ 中。已知頂點 $A(-6, -4)$, 且兩條中線 \overline{BD} 與 \overline{CE} 分別在 x 軸與 y 軸上, 則 $\triangle ABC$ 的面積為 _____。

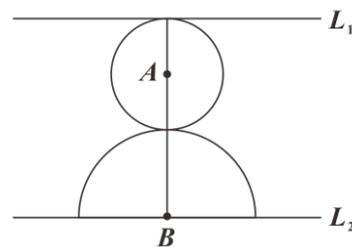
10. 在 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 之間, 方程式 $\sin x + |\sin x| = \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ 有 _____ 個實根。

11. 設平面上四點 $O(0,0)$ 、 $P(7,-2)$ 、 $Q(3,2)$ 、 $R(-4,4)$, 四邊形 $OPQR$ 經由矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ 線性變換後得一四邊形 $OP_1Q_1R_1$, 再將此四邊形 $OP_1Q_1R_1$, 以 O 為中心, 逆時針旋轉 15° 得另一四邊形 $OP_2Q_2R_2$, 則四邊形 $OP_2Q_2R_2$ 的面積為 _____。

12. 如圖, $ABCD-EFGH$ 為平行六面體, 若 $\overrightarrow{AG} = (-2, 11, 2)$ 、 $\overrightarrow{AB} = (1, 10, 6)$ 、 $\overrightarrow{AE} = (3, 6, -2)$, 則此平行六面體的體積為 _____。



13. 一圓與一半圓相切如右圖, 其中 A, B 為圓心, 上下二條平行線 L_1, L_2 與連心線垂直, 已知 L_1 與 L_2 之距離為 3, 若半圓面積與圓面積乘積最大值為 $\frac{b}{a}\pi^2$, 且 a, b 為互質的正整數, 則 $a+b =$ _____。



14. 在空間坐標系中，一直線通過點 $A(0,3,5)$ 且與直線 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 交於 P ，並與直線 $\begin{cases} x=5 \\ z=-5 \end{cases}$ 交於 Q ，令 $\overline{PQ} = k$ ，則 $k^2 =$ _____。

15. 在邊長為 2 的正六邊形 $ABCDEF$ 中，任取三個相異頂點作成三角形，若此三角形面積的期望值為 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$ (a, b 為互質的正整數)，則 $a+b =$ _____。