

2024 年第八屆臺灣中小學數學能力檢定考試

Taiwan Mathematics Test

TMT10

考試須知

1. 未經監考人員宣佈打開測驗卷之前，不可先行打開試卷作答。
2. 本次測驗時間 80 分鐘、共 30 題，分別為單選題 15 題、選填題 15 題，總分 150 分。試卷內的圖形均為示意圖，可能未依正確比例繪製。限用黑色 2B 軟心鉛筆劃記答案卡，答案卡不得以修正液(帶)修正，答案卡要保持清潔與完整，不可汙損或折疊，劃記要「黑」、「清晰」、「塗滿圓格」但不可出格。
 - (1) 單選題：
 - (I) 答對一題得 5 分，未作答得 1 分，答錯以 0 分計算。
 - (II) 每一題各有 A、B、C、D、E 五個選項，其中只有一個選項是正確的答案。
 - (2) 選填題：
 - (I) 答對一題得 5 分，未作答或答錯以 0 分計算。
 - (II) 每一題答案是範圍在 000 至 999 之間的整數。如答案為 7，請塗黑 007；如答案為 43，請塗黑 043；如答案為 123，請塗黑 123。三個圓格全對才給分，沒有倒扣或部份給分。
3. 除了考試所准許使用的尺、圓規、橡皮擦、空白計算紙與身分證明文件外，請勿攜帶任何輔助工具(包含手機、計算器、量角器、智慧型手錶及具計算功能的裝置等)進入考場，考卷上所有的題目均不需使用計算器便可作答。
4. 交卷時請將答案卡交回，測驗開始 40 分鐘後，始准交卷離場。

2024 臺灣中小學數學能力檢定考試 TMT10

單選題

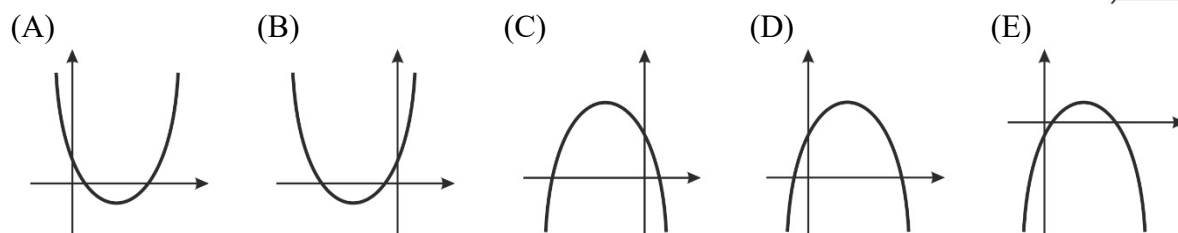
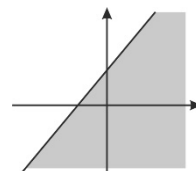
- 試問符合不等式 $(x+1)(x-3)(x^2+4x+4) \leq 0$ 的整數解之個數為何？
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8
- 設在坐標平面上的三條直線 L_1 ， L_2 ， L_3 的斜率分別為 m_1 ， m_2 ， m_3 。若 L_1 通過 $(-4,1)$ 、 $(2,-3)$ 兩點， L_2 平行直線 $2x-3y+1=0$ ， L_3 垂直直線 $2x+3y+1=0$ ，則下列哪一個選項是正確的？
(A) $m_1 > m_2 > m_3$ (B) $m_1 > m_3 > m_2$ (C) $m_2 > m_1 > m_3$
(D) $m_2 > m_3 > m_1$ (E) $m_3 > m_2 > m_1$
- 若圓 $x^2 + y^2 + 3x + 3y = 0$ 和直線 $y = mx$ 交於 A 、 B 兩點，且 $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$ ，則 m 的值為何？
(A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 (E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- 一個等比數列前面 n 項總和記為 S_n 。若 $\frac{S_8}{S_4} = 17$ ，則 $\frac{S_6}{S_2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
(A) 3 (B) 6 (C) 8 (D) 16 (E) 21
- 若將兩個循環小數 $0.\overline{13}$ 及 $0.1\overline{62}$ 之和寫成一個循環小數 A ，則 A 的小數點後第 113 位的數字為何？
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

6. 已知實係數三次多項式 $f(x)$ 除以 $(x+1)^3$ 的餘式為一次多項式，且除以 $x+1$ 的餘式為 4。若 $f(1)=6$ ，則 $f(-3)$ 之值為何？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
7. 若函數 $f(x)=3x^2+4x+5$ 的圖形向右平移 k 單位後，其對稱軸為 y 軸，則 k 之值為何？
 (A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) 0 (D) $-\frac{4}{3}$ (E) $\frac{4}{3}$
8. 三角形 ABC 中，若 $\sin(A+B)=\sin B=\frac{3}{5}$ ，則 $\sin\frac{A}{2}$ 之值為何？
 (A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (C) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{4}{5}$
9. 已知一組數據由小而大依序為 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{123}$ ，且其算術平均數為 68，標準差為 10。若這組數據中的 $x_{62}, x_{63}, x_{85}, x_{88}$ ，其標準化數值分別為 0.2, 0.3, 1.2, 1.4，則原數據 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{123}$ 的第 70 百分位數最接近下列哪一個選項？
 (A) 71 (B) 74 (C) 79 (D) 81 (E) 83
10. 已知在坐標平面上有一直線 L 過點 $\left(-6, \frac{3}{2}\right)$ 且斜率為 $\frac{3}{4}$ 。若直線 L 與 x 軸及 y 軸所圍封閉區域為 $\triangle ABC$ ，則 $\triangle ABC$ 內切圓的面積為何？
 (A) 3π (B) 4π (C) 5π (D) 6π (E) 7π

11. 設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆為實係數三次多項式，且首項係數分別為 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ ，已知 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 兩圖形有相同的對稱中心 $(0,0)$ ，且兩圖形相交於 $(2,0)$ ，試選出正確的選項。
- (A) $f(-2) < g(-2)$ (B) $f(-1) < g(-1)$ (C) $f(1) < g(1)$
 (D) $f(3) < g(3)$ (E) $f(4) < g(4)$

12. 已知 $\triangle ABC$ 的周長為 24， $\angle A = 60^\circ$ 。若 $\triangle ABC$ 外接圓半徑為 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為何？
- (A) $20\sqrt{3}$ (B) $21\sqrt{3}$ (C) $22\sqrt{3}$ (D) $23\sqrt{3}$ (E) $24\sqrt{3}$

13. 若 $ax+by \leq c$ 為右圖深色區域，則 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形可能為下列何者？



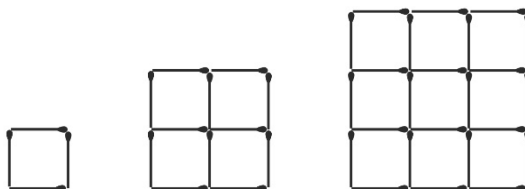
14. 在極坐標平面上，極點 O 和 $C[4, 130^\circ]$ 恰為一正六邊形 $OABCDE$ 上的兩個頂點。則下列哪一個極坐標表示的點也是此正六邊形的頂點？
- (A) $[4, 70^\circ]$ (B) $[2, 100^\circ]$ (C) $[2\sqrt{3}, 160^\circ]$ (D) $[2\sqrt{3}, 190^\circ]$ (E) $[4, 190^\circ]$

15. 有 30 筆數據資料 (x_i, y_i) ， $i = 1, 2, 3, \dots, 30$ ，其算術平均數 $\mu_x = 6$ 、 $\mu_y = 5$ ， x 與 y 的相關係數為 0.9 且 y 對 x 的迴歸直線通過 $(-4, -2)$ ，則此 30 筆資料中 x_i 的標準差 σ_x 與 y_i 的標準差 σ_y 之比例 $\sigma_x : \sigma_y$ 為何？
- (A) 9:7 (B) 7:9 (C) 6:7 (D) 7:6 (E) 10:7

選填題

- 若 $f(x) = 4x^5 + 8x^4 + 7x^3 - ax^2 - 2x + 5$ 有因式 $x-1$ ，則 $a =$ _____。
- 若 $\triangle ABC$ 有一個內角為 120° ，且三邊長構成公差為 4 的等差數列，則 $\triangle ABC$ 的周長為 _____。
- 已知 x 介於 $\frac{1}{5}$ 與 $\frac{1}{4}$ 之間，且 $\left| x - \frac{1}{4} \right| : \left| x - \frac{1}{5} \right| = 3:2$ 。若 x 化成最簡分數為 $\frac{b}{a}$ ，則 $a+b =$ _____。
- 在 $(1+x)^{10} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^6$ 的展開式中， x^8 項的係數為 _____。
- 若點 (a, b) 在直線 $3x + 2y = 12$ 上，則 $8^a + 4^b$ 的最小值為 _____。
- 將 1, 2, 3, 4, 5, 6 這六個數字排成一列，則 1 和 2 不相鄰且 1 和 3 也不相鄰的排法共有 _____ 種。
- 有 A 、 B 兩個袋子，其中 A 袋有 2 個綠球及 5 個藍球， B 袋有 3 個綠球及 4 個藍球。有一抽獎遊戲的規則如下：從 A 、 B 兩個袋子中各同時取出兩球，每個球被取出的機會相同。若取出兩個同色球可得獎金 100 元，而取出兩個異色球可得獎金 310 元，則從 A 袋獲得獎金的期望值比從 B 袋獲得獎金的期望值少 _____ 元。
- 若 $y = f(x)$ 在 $x=10$ 的一次近似為 $y = 5x - 54$ ，且 $y = f(x)$ 的圖形向左平移 10 單位，再向上平移 a 單位後變為 $y = x^3 + 7x^2 + bx$ 的圖形，則 $10a + 5b =$ _____。

9. 九九幼兒園大班共有 8 位小朋友，預計在畢業典禮上場表演二場話劇，第一場話劇需要 5 個小朋友上場表演，第二場話劇需要 4 個小朋友上場表演，老師希望畢業典禮上每個小朋友都有上台表演到。若不計較每場表演的出場序，則這二場表演名單的安排方式共有 _____ 種。
10. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的每一項都是正數，且對於任意的正整數 k 都滿足 $\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+2}} = 2\sqrt{a_{k+1}}$ 。若 $a_9 = 9, a_{16} = 16$ ，則 $a_{23} =$ _____。
11. 已知五筆資料中有四筆資料為 3、9、12、19，而另一筆資料為 a 。若此五筆資料的標準差為 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ ，則 a 的最小值為 _____。
12. 一個邊長為 n 的大正方形中，共有 n^2 個單位正方形。若每一個單位正方形的邊都恰有一根火柴棒，而此大正方形共用了 a_n 根火柴棒，則 1000 根火柴棒能排出最大正方形的邊長為 _____。



13. 已知 p, q 均為正數，且 a, b 為方程式 $x^2 - px + q = 0$ 的二個相異實根。若 $a, b, -2$ 這三個數經過適當的排序後可以形成等差數列，也可以經過另一適當的排序後形成等比數列，則 $p^2 + q^2 =$ _____。
14. 坐標平面上有一正方形 $ABCD$ ，其中 $A(1,1)$ 、 $B(-1,1)$ 、 $C(-1,-1)$ 、 $D(1,-1)$ 。若有一圓 $(x-r)^2 + (y-s)^2 = t$ 和 \overline{BC} 相切且通過 A 、 D 兩點，則 $4t - r + s =$ _____。
15. 若數線上 $|x-10| \leq k \leq |x-20|$ 的解為長度 8 的線段，則 $k =$ _____。

參考公式及可能用到的數值

(一) 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$ 。

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。

(二) $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 。（ R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑）

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

(三) 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算數平均數 $\mu_x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ ，

標準差

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_x)^2 + (x_2 - \mu_x)^2 + \dots + (x_n - \mu_x)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_x^2]}$$

(四) 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + (x_2 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) + \dots + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y}$ ，

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y - \mu_y = r_{X,Y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$ 。

(五) 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

(六) 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ 。