

2024 年第八屆臺灣中小學數學能力檢定考試

Taiwan Mathematics Test

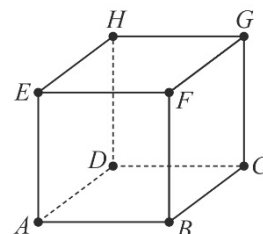
TMT11A

考試須知

1. 未經監考人員宣佈打開測驗卷之前，不可先行打開試卷作答。
2. 本次測驗時間 80 分鐘、共 30 題，分別為單選題 15 題、選填題 15 題，總分 150 分。試卷內的圖形均為示意圖，可能未依正確比例繪製。限用黑色 2B 軟心鉛筆劃記答案卡，答案卡不得以修正液(帶)修正，答案卡要保持清潔與完整，不可汙損或折疊，劃記要「黑」、「清晰」、「塗滿圓格」但不可出格。
 - (1) 單選題：
 - (I) 答對一題得 5 分，未作答得 1 分，答錯以 0 分計算。
 - (II) 每一題各有 A、B、C、D、E 五個選項，其中只有一個選項是正確的答案。
 - (2) 選填題：
 - (I) 答對一題得 5 分，未作答或答錯以 0 分計算。
 - (II) 每一題答案是範圍在 000 至 999 之間的整數。如答案為 7，請塗黑 007；如答案為 43，請塗黑 043；如答案為 123，請塗黑 123。三個圓格全對才給分，沒有倒扣或部份給分。
3. 除了考試所准許使用的尺、圓規、橡皮擦、空白計算紙與身分證明文件外，請勿攜帶任何輔助工具(包含手機、計算器、量角器、智慧型手錶及具計算功能的裝置等)進入考場，考卷上所有的題目均不需使用計算器便可作答。
4. 交卷時請將答案卡交回，測驗開始 40 分鐘後，始准交卷離場。

2024 臺灣中小學數學能力檢定考試 TMT11A

單選題



1. 如圖，在正立方體 $ABCD-EFGH$ 的八個頂點中取哪四個點可形成一個正四面體？

- (A) A, B, C, F (B) A, B, D, E (C) A, C, E, F
 (D) A, C, D, F (E) A, C, F, H

2. 若 $a = \cos 2$ ，則下列選項何者正確？

- (A) $-1 < a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < -\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2} < a < 0$
 (D) $0 < a < \frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & c \end{bmatrix}$ 且 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ ，則 $a+b-c$ 之值為何？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

4. 若 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c+d = ?$

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) 3

5. 若函數 $f(x) = 3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2$ ，則函數 f 的週期為何？

- (A) 2 (B) 4 (C) π (D) 2π (E) 4π

6. 已知平面上兩直線 L_1 、 L_2 的參數式分別為 $L_1: \begin{cases} x = -4 - t \\ y = 5 + 2t \end{cases}, t \in R$ 及 $L_2: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -4 - t \end{cases}, t \in R$ 。
試問 L_1 和 L_2 所夾銳夾角的角平分線之斜率為何？
(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1 (E) -2

7. 已知空間中三點 $A(-1, 2, 3)$ 、 $B(2, 6, 3)$ 、 $C(-2, 4, 5)$ ，且 D 在 $\angle BAC$ 之分角線上。若 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$ ，則 k 之值為何？
(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) 3 (E) 5

8. 已知向量 $\vec{a} = (2\sin\theta, 1)$ ， $\vec{b} = (1, 2\cos\theta)$ ， $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，則 $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ 的最大值為何？
(A) $6 + \sqrt{3}$ (B) $6 + 2\sqrt{3}$ (C) $6 + 3\sqrt{2}$ (D) $6 + 4\sqrt{2}$ (E) $6 + 4\sqrt{3}$

9. 若方程組 $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \\ 3x + 4y = 2a - b \\ 4x - 3y = 2b - a - 3 \end{cases}$ 有解，則數對 (a, b) 為何？
(A) (1, 3) (B) (1, -3) (C) (-1, 3) (D) (-1, -3) (E) (2, 3)

10. 台灣彩券發行一款九宮格對對碰刮刮樂，其中 5000 元有一格，100 元、200 元、500 元、1000 元各有二格，且九格數字任意排列（下圖為一種隱藏的可能排法）。若每張刮刮樂購買金額為 90 元，且購買的顧客祇能任意刮其中的二格，當刮出的二格金額相同時，即可得到此金額的獎金，其餘情形均無獎金，則此顧客購買一張刮刮樂損失的期望值為多少元？

200	100	1000
500	100	5000
500	200	1000

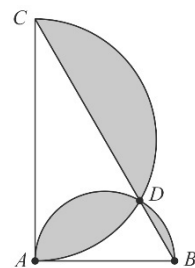
- (A) 5 元 (B) 10 元 (C) 25 元 (D) 40 元 (E) 50 元

11. 若 $\vec{a} = (\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$ ，則 \vec{b} 為下列哪一個向量時， \vec{a} 、 \vec{b} 兩向量所圍成的平行四邊形的面積最大？
- (A) $(\cos 10^\circ, \sin 10^\circ)$ (B) $(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ)$ (C) $(\cos 110^\circ, \sin 110^\circ)$
 (D) $(\cos 160^\circ, \sin 160^\circ)$ (E) $(\cos 210^\circ, \sin 210^\circ)$

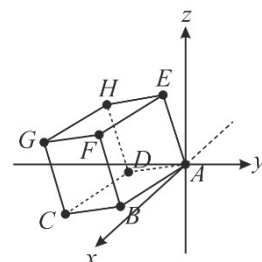
12. 若方程式 $\sin x = \cos 2x$ 的正實數解依小到大排為 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$ ，則 $\alpha_{99} - \alpha_{98}$ 之值為何？
- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$ (E) $\frac{2\pi}{3}$

13. 若直線 L 過 $(\pi, 0)$ ，且和 $y = \sin x$ 的圖形之交點包含 $A(a_1, b_1)$ 、 $B(a_2, b_2)$ 兩點，其中 $0 < a_1 < \pi < a_2 < 2\pi$ ，則 $\frac{a_1 b_1 - a_2 b_2}{b_1 - b_2}$ 的值最接近下列哪一個整數？
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

14. 如圖，一個 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的直角三角形中 $\overline{AB} = 2$ 。若分別以 \overline{AC} 、 \overline{AB} 為直徑作半圓，交於斜邊上的 D 點，則陰影區域的面積為何？
- (A) $2\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ (B) $2\pi - 2\sqrt{3}$ (C) $\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3}$
 (D) $2\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3}$ (E) $\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}$



15. 如圖，在空間直角坐標系中，有一正六面體 $ABCD-EFGH$ ，且點 E 在 xy 平面的上方。若點 $A(0, 0, 0)$ 、 $B(2, -1, 2)$ 、 $D(1, -2, -2)$ ，則點 E 的坐標為何？
- (A) $(2, 2, 1)$ (B) $(2, -2, 1)$ (C) $(-2, 2, 1)$ (D) $(-2, -2, 1)$ (E) $(-1, -2, 2)$

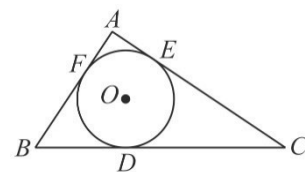


選填題

- 若將 $y = 2^x$ 的圖形向右移 2 單位，向下移動 3 單位後，可得到 $y = a + b \cdot 2^x$ ，則 $4b - a =$ _____。
- 已知 $\log_a x = 3$ ， $\log_b x = 4$ 。若 $\log_{ab} x$ 可以表示成最簡分數 $\frac{m}{n}$ ，則 $m + n =$ _____。
- 若方程式 $\log_5(25^x + 100) = x + 1 + 2\log_5 2$ 之解為 $\log_5 t$ ，則 $t =$ _____。
- 已知 θ 為銳角。若 $\sin \theta = \frac{4}{5} \cos \frac{\theta}{2}$ ，則 $100 \cdot \cos \theta =$ _____。
- 有一背包客旅行於某地，而當地只有甲、乙兩間旅館可供選擇，如果今晚他住某間旅館的話，則明晚續住此間旅館的機率為 $\frac{1}{3}$ ，住另一間旅館的機率為 $\frac{2}{3}$ 。已知此人星期一晚上決定住甲旅館，若三天後的晚上他也住在甲旅館的機率之最簡分數為 $\frac{n}{m}$ ，則 $m + n =$ _____。
- 某高中的流行音樂社參加人員依性別與年級區分，人數統計如下表格所示。隨機從此社團中任選一人，令 A, B 分別表示抽到男生與抽到二年級學生的事件，若 A, B 為獨立事件，則 $x =$ _____。

	年級	一年級	二年級
性別			
男		12	36
女		8	x

7. 如圖，圓 O 為 $\triangle ABC$ 之內切圓且與 \overline{BC} 、 \overline{CA} 、 \overline{AB} 分別相切於 D 、 E 、 F 三點。已知 $\overline{AB}=5$ ， $\overline{BC}=7$ ， $\overline{CA}=6$ 。若 $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ ，則 $14m+7n=$ _____。



8. 某校同學參加 TMT 數學能力檢定考試，經評分後將全校同學依總分由高到低排序：前 30% 的同學屬於 A 組，後 20% 的同學屬於 C 組，其餘的同學屬於 B 組。進一步分析同學的答題情形，得到單選題答對率如下表。

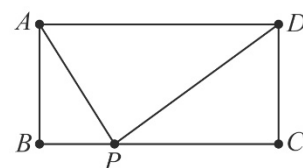
	A 組	B 組	C 組
單選題答對率	100%	80%	40%

- 若從單選題答對的同學中任選一人，而此人屬於 A 組的機率之最簡分數為 $\frac{m}{n}$ ，則 $m+n=$ _____。

9. 若空間中兩直線 $L_1: \frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{5}$ 與 $L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{m} = \frac{z-4}{n}$ 互相垂直，且 L_2 垂直平面 $E: px+y-2z=7$ ，則 $mp-10n=$ _____。

10. 設 $A(10,-10,7)$ ， $B(2,0,3)$ ， $C(4,-4,7)$ 為空間中三點。若 H 為 $\triangle ABC$ 之垂心，則 \overrightarrow{BH} 在 \overrightarrow{BC} 上的正射影長度為 _____。

11. 如圖，矩形 $ABCD$ 中， $\overline{BC}=2\overline{AB}$ ，點 P 在 \overline{BC} 上且滿足 $\overline{AB}+\overline{BP}=\overline{PD}$ ，則 $\tan \angle APD=$ _____。



12. 空間中，已知兩直線 $L_1: \begin{cases} x+y=3 \\ z=0 \end{cases}$ 與 $L_2: \begin{cases} x+z=6 \\ y=0 \end{cases}$ 互相歪斜，則 L_1 與 L_2 距離的平方為 _____。
13. 已知 a 、 b 皆為實數且滿足 $2a+3b=10$ 。今數線上有 A 、 B 兩點，其坐標分別為 $2a^2$ 、 b^2+5 。若點 P 位於 A 、 B 之間，且滿足 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:2$ ，則當 P 點最接近原點的時候，其坐標為 _____。
14. 設空間中有 A 、 B 、 C 、 D 四點，滿足 $|\overrightarrow{AB}|=2$ 、 $|\overrightarrow{AC}|=6$ 、 $|\overrightarrow{AD}|=9$ 。若 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{AC} 夾角為 θ ， $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，直線 AD 與平面 ABC 夾角亦為 θ ，且四面體 $ABCD$ 的體積為 2，則 $210 \cdot \sin \theta =$ _____。
15. 已知 A 、 B 為樣本空間 S 的二事件，且 $P(B)=\frac{1}{3}$ 、 $P(A \cup B)=\frac{19}{30}$ 、 $P(B|A)=\frac{2}{5}$ 。若 $P(B|A')=\frac{m}{n}$ ，其中 A' 為 A 的餘事件，且 m 、 n 為互質的正整數，則 $m+n =$ _____。

參考公式及可能用到的數值

(一) 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$ 。

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。

(二) 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ，

三角函數的和角公式： $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ ，

三角函數的和角公式： $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ 。

(三) $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 。（ R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑）

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

(四) 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算數平均數 $\mu_x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ ，

標準差

$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_x)^2 + (x_2 - \mu_x)^2 + \dots + (x_n - \mu_x)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_x^2]}$ 。

(五) 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + (x_2 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) + \dots + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y}$ ，

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y - \mu_y = r_{X,Y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$ 。

(六) 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

(七) 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ 。

(八) 柱體體積 = 底面積 \times 高。

錐體體積 = $\frac{1}{3}$ (底面積 \times 高)。