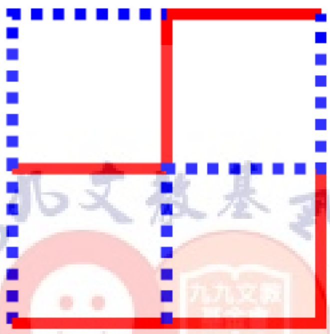
2025 43rd AIME II

1. 六點 A、B、C、D、E、F 依序排列在一條直線上，而點 G 為此直線外的一點。已知 $\overline{AC}=26$，$\overline{BD}=22$，$\overline{CE}=31$，$\overline{DF}=33$，$\overline{AF}=73$，$\overline{CG}=40$ 且 $\overline{DG}=30$。試求 ΔBGE 的面積。

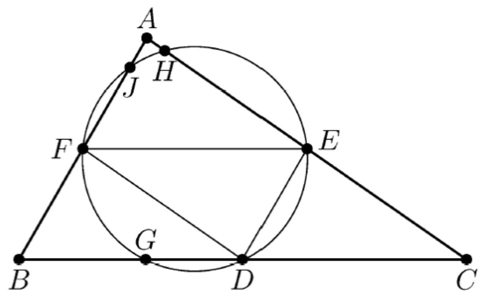
2. 試求滿足 $n+2$ 能夠整除 $3(n+3)(n^2+9)$ 的所有正整數 n 之和。

3. 由四個單位正方形組成一個 2×2 的網格。對於構成該網格的12條邊，每條邊被塗成紅色或藍色，使得每個單位正方形都有2條紅色邊與2條藍色邊。下圖為其中一種滿足條件的著色方法（紅色為實線，藍色為虛線）。試求所有符合條件的著色方法數。

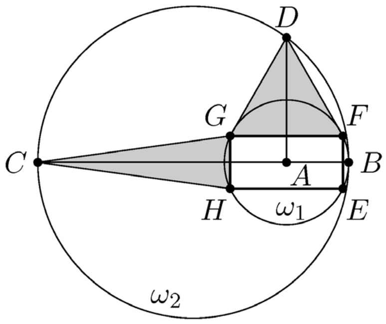


4. 已知乘積 $\displaystyle\prod_{k=4}^{63}\frac{\log_k\left(5^{k^2-1}\right)}{\log_{k+1}\left(5^{k^2-4}\right)}=\frac{\log_4\left(5^{15}\right)}{\log_5\left(5^{12}\right)}\times\frac{\log_5\left(5^{24}\right)}{\log_6\left(5^{21}\right)}\times\frac{\log_6\left(5^{35}\right)}{\log_7\left(5^{32}\right)}\times\cdots\times\frac{\log_{63}\left(5^{3968}\right)}{\log_{64}\left(5^{3965}\right)}$ 之值等於 $\dfrac{m}{n}$，其中 m 與 n 為互質的正整數。試求 $m+n$ 之值。

5. 設 ΔABC 中 $\angle BAC=84^\circ$，$\angle ABC=60^\circ$，$\angle ACB=36^\circ$，且點 D,E,F 分別為 $\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$ 的中點。已知 ΔDEF 的外接圓分別交 $\overline{BD}$，$\overline{AE}$，$\overline{AF}$ 於點 G,H,J，且此圓被點 G,D,E,H,J,F 分成六個小圓弧，如下圖所示。試求 $\overset{\frown}{DE}+2\cdot\overset{\frown}{HJ}+3\cdot\overset{\frown}{FG}$ 之值（弧長以度數計）。



6. 如圖，圓心 A 、半徑 6 的圓 ω_1 內切於半徑 15 的圓 ω_2 ，切點為 B 。已知點 C,D 在圓 ω_2 上，使得 $\overline{BC}$ 是圓 ω_2 的直徑且 $\overline{BC}\perp\overline{AD}$ ，又 $EFGH$ 是圓 ω_1 的內接長方形，使得 $\overline{EF}\perp\overline{BC}$ ，且 ΔDGF 與 ΔCHG 的面積相等。設長方形 $EFGH$ 的面積等於 $\dfrac{m}{n}$ ，其中 m 與 n 為互質的正整數。試求 $m+n$ 之值。



7. 設 A 是 2025 所有正因數所成的集合， B 是隨機從 A 取出的子集合。已知 B 不是空集合且滿足它的所有元素之最小公倍數為 2025 之機率是 $\dfrac{m}{n}$ ，其中 m 與 n 為互質的正整數。試求 $m+n$ 之值。

8. 從無窮多枚 1 分、10 分與 25 分的美元硬幣中，西拉斯想要湊出總額為 N 分的組合，其中 N 為正整數。他使用的**貪婪演算法**是每次都選擇幣值不超過 N 的**最大硬幣**。例如，湊總額為 42 分時，他會選擇 1 枚 25 分硬幣、1 枚 10 分硬幣、7 枚 1 分硬幣（共使用 9 枚硬幣）。然而，若選擇 4 枚 10 分硬幣與 2 枚 1 分硬幣，就可用較少的 6 枚硬幣數達到相同總額。試問從 1 到 1000 中有多少個可能的 N 值滿足此種貪婪演算法可找到**最佳解**（亦即無法使用較少的硬幣數達到相同的總額 N ）？

9. 令函數 $f(x)=\sin(7\pi\cdot\sin(5x))$。已知滿足 $\sin(7\pi\cdot\sin(5x))=0$ 且 $0<x<2\pi$ 的 x 值恰有 n 個，又這 n 個 x 值中滿足 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸相切的 x 值恰有 t 個。試求 $n+t$ 之值。

10. 有 16 張椅子排成一列，現有 8 個人每人選取一張椅子入坐，且沒有一人是緊鄰其他兩人。設 N 表示這 8 個人入坐 16 張椅子的所有方法數。試求 N 除以 1000 的餘數。

11. 設 S 為一個正 24 邊形的所有頂點所成的集合。已知能夠畫 12 條等長線段，使得 S 中的每個頂點恰好為一條線段的端點。試求其方法數。

12. 設 $A_1A_2A_3\ldots A_{11}$ 為一個 11 邊非凸簡單多邊形，並且滿足以下條件：
(1) 對於 $2\le i\le 10$ ，$\Delta A_iA_1A_{i+1}$ 的面積皆為 1。
(2) 對於 $2\le i\le 10$ ，$\cos\left(\angle A_iA_1A_{i+1}\right)=\dfrac{12}{13}$ 。
(3) 這個 11 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{11}$ 的周長為 20。
設 $\overline{A_1A_2}+\overline{A_1A_{11}}=\dfrac{m\sqrt{n}-p}{q}$ ，其中 m,n,p,q 為正整數，且 n 不被任何質數的平方整除，且無質數同時整除 m,p,q 。試求 $m+n+p+q$ 之值。
註：簡單多邊形是指多邊形的邊除了端點都不相交。

13. 設有理數數列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ 滿足 $x_1 = \dfrac{25}{11}$，且當 $k \geq 1$ 時 $x_{k+1} = \dfrac{1}{3}\left(x_k + \dfrac{1}{x_k} - 1\right)$。已知 x_{2025} 可表示為 $\dfrac{m}{n}$，其中 m 與 n 為互質的正整數。試求 $m+n$ 除以 1000 的餘數。

14. 設直角三角形 ABC 中，$\angle A = 90°$ 且 $\overline{BC} = 38$。這個三角形內部存在兩點 K 與 L，滿足 $\overline{AK} = \overline{AL} = \overline{BK} = \overline{CL} = \overline{KL} = 14$。已知四邊形 $BKLC$ 的面積可表示為 $n\sqrt{3}$，其中 n 為正整數。試求 n 之值。

15. 已知恰有三個實數 k，使得定義在正實數的函數 $f(x) = \dfrac{(x-18)(x-72)(x-98)(x-k)}{x}$ 在恰好兩個正實數 x 處達到最小值。試求這三個 k 值之和。